Об интегральном модуле непрерывности

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ и П. Л. УЛЬЯНОВ (Москва, СССР)

Пусть 2π-периодическая функция $\varphi(t)\in L^p(0, 2\pi)$ при некотором $p\in[1, \infty)$, тогда

$$\omega_p(\delta; \varphi) = \sup_{|h|\leqq\delta} \left\{\int_0^{2\pi} |\varphi(t+h)-\varphi(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 \leqq \delta \leqq 2\pi)$$

называют модулем непрерывности (в L^p) от φ.

Для случая непериодических функций $f(t)\in L^p(a, b)$, где $-\infty\leqq a<b\leqq+\infty$ модуль непрерывности определяется так:

$$\omega_p(\delta; f) = \sup_{0\leqq h\leqq\delta} \left\{\int_a^{b-h} |f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 \leqq \delta \leqq 1),$$

где $b-h=\infty$, если $b=\infty$.

Отметим, что если в условиях утверждения (теоремы, леммы и т.п.) говорится о функциях из $L^p(a, b)$ (из $L^p(0, 2\pi)$), то подразумевается, что речь идет о непериодических (соответственно периодических) функциях, а встречающийся в утверждении (или же в его доказательстве) знак $\|f\|_p$ понимается в смысле нормы, т.е.

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(a,b)} \equiv \left\{\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, всюду ниже через $|E|$ мы будем обозначать меру Лебега измеримого множества E.

Для доказательства точных теорем вложения H_p^ω (определение класса H_p^ω см. [5], стр. 649) в пространство L^ν существенно были испльозованы (в случае $p=1$) одним из авторов (см. [5] и [6]) следующие установленные им утверждения о модулях непрерывности:

Лемма 1 (см. [6], стр. 108). *Если функция $f(t)\in L(-\infty, \infty)$, то*

$$\omega_1\left(\frac{1}{n}; f\right) \geqq \frac{1}{9} \sup_{\substack{E\subset(-\infty,\infty)\\ |E|\leqq\frac{1}{n}}} \int_E |f(t)|\,dt \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{1}$$

Лемма 2 (см. [6], стр. 107). *Если функция* $f(t)\in L(0,1)$ *то*

$$\omega_1\left(\frac{1}{n};f\right)\geqq\frac{1}{9}\Big\{\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|\leqq\frac{1}{n}}}\int_E|f(t)|\,dt-\inf_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|\geqq\frac{1}{n}}}\int_E|f(t)|\,dt\Big\}\quad(n=1,2,\ldots).\tag{2}$$

Пусть $F(z,|f|)$—невозрастающая на $(0,1)$ равноизмерим аяс $|f(t)|$ функция (см. [5], стр. 655). Тогда справедлива

Лемма 3 (см. [5], стр. 656). *Если неотрицательная функция* $f(t)\in L(0,1)$, *а* $\alpha\in[0,1]$—*некоторое число, то*

а) $$\sup_{\substack{M\subset[0,1]\\|M|=\alpha}}\int_M f(t)\,dt=\int_0^\alpha F(z,f)\,dz,$$

б) $$\inf_{\substack{M\subset[0,1]\\|M|=\alpha}}\int_M f(t)\,dt=\int_{1-\alpha}^1 F(z,f)\,dz.$$

Впоследствии стало известно, что в этом направлении уже имелись некоторые результаты о модулях непрерывности. Именно, пусть функция $f(t)\in L^p(0,2\pi)$ при некотором $p\in[1,\infty)$ и f неэквивалентна постоянной, тогда

$$\int_a^{a+h}|f(t)|^p\,dt\leqq C_{f,p}\frac{\omega_p^p(h;f)}{h^{p-1}}\quad(-\infty<a<+\infty,\ 0<h\leqq2\pi),$$

где постоянная $C_{f,p}$ зависит только от f и p.

Это неравенство при $p=1$ было доказано Е. Хиллом и Дж. Клейном (см. [1]), а при $p>1$ — Идзуми (см. [2]).

В 1961 году венгерским математиком Й. Ципсером (см. [3]) при тех же условиях на функцию $f(t)$ было сформулировано следующее обобщение теоремы Хилла—Клейна—Идзуми:

$$\sup_{\substack{E\subset[0,2\pi]\\|E|=h}}\int_E|f(t)|^p\,dt\leqq C_{f,p}\omega_p(h;f)\quad(0<h\leqq2\pi).\tag{3}$$

Аналогичное неравенство сформулировано Й. Ципсером и для случая, когда $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$.

Однако доказательство Ципсера последних неравенство ошибочно, ибо он в своих рассуждениях существенно пользуется равенством:

$$\int_0^h F(t)\,dt-\int_0^h(F(x+t)\,dt=\int_0^h[F(t)-F(t+h)]\,dt,\tag{4}$$

где $F(x)=\int_E|f(x+u)|^p du$, а измеримое множество E и переменная x взяты из области определения суммируемой в p-ой степени функции $f(u)$ и $|E|=h$.

Убедимся, что как в периодическом, так и в непериодическом случаях равенство (4) ошибочно. В самом деле, в силу аддитивности интеграла Лебега, соотношение (4) тождественно равенству

$$\int_0^h F(x+h)\,dt = \int_0^h F(t+h)\,dt. \tag{5}$$

Пусть $f(t)=t^{1/p}$ при $t\in[0, 2\pi)$. Тогда для числа $h\in(0, \pi)$ и множества $E=[0, h]$ имеем

$$F(x) = \int_0^h (x+t)\,dt = xh+\frac{h^2}{2} \quad (x\in[0, 2\pi-h]).$$

Отсюда

$$\int_0^h F(x+t)\,dt = xh^2+h^3 \not\equiv 2h^3 = \int_0^h F(h+t)\,dt \quad (0<h<\pi,\ 0<x<2\pi-h),$$

что противоречит (5).

Продолжая $f(t)$ с полуотрезка $[0, 2\pi)$ на всю ось периодически с периодом 2π в периодическом случае, и нулем в непериодическом случае, получаем, что равенство (4) действительно не имеет место.

Более того, если $f(t)\in L^p(-\infty, \infty)$, то из равенства (5) вытекает (при $x\to\infty$), что

$$\int_0^h F(h+t)\,dt = 0$$

и потому (опять в силу (5) и неотрицательности F) функция $F(x)\equiv 0$, т.е. $f(t)=0$ почти всюду.

Целью настоящей заметки является, с одной стороны, доказать, что неравенства вида (3) являются следствием лемм 1, 2 и 3 и, с другой стороны, сделать ряд замечаний по рассматриваемому вопросу (и в том числе по вопросу взаимосвязи модулей непрерывности функции f и ее равноизмеримой функции φ (см. об этом теорему 3)). Ниже нам понадобится следующее утверждение: если $f(t)\in L^p(a, b)$, то

$$\omega_1(\delta; |f|^p) \leqq p\cdot 2^{p-1}\|f\|_p^{p-1}\omega_p(\delta; f) \quad (0\leqq\delta\leqq 1). \tag{6}$$

Действительно, так как по теореме Лагранжа

$$|x^p-y^p| \leqq p(x+y)^{p-1}|x-y| \quad (p\geqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0),$$

и

$$|x+y|^p \leqq 2^{p-1}(x^p+y^p) \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0),$$

то

$$\omega_1(\delta; |f|^p) = \sup_{0\leqq h\leqq\delta} \int\limits_a^{b-h} \big||f(t+h)|^p - |f(t)|^p\big|\,dt \leqq$$

$$\leqq \sup_{0\leqq h\leqq\delta} p\int\limits_a^{b-h} \big(|f(t+h)|+|f(t)|\big)^{p-1}\big||f(t+h)|-|f(t)|\big|\,dt \leqq$$

$$\leqq \sup_{0\leqq h\leqq\delta} p\left\{\int\limits_a^{b} [|f(t+h)|+|f(t)|]^p\,dt\right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{\int\limits_a^{b-h} \big||f(t+h)|-|f(t)|\big|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq p2^{p-1}\|f\|_p^{p-1}\omega_p(\delta;f).$$

Перейдем к доказательству теорем.

Теорема 1. *Если* $f(t)\in L^p(-\infty,\infty)$ *при некотором* $p\in[1,\infty)$, *то*

$$\sup_{\substack{E\subset(-\infty,\infty)\\ |E|=h}} \int\limits_E |f(t)|^p\,dt \leqq 18p2^{p-1}\|f\|_p^{p-1}\omega_p(h;f) \quad (0\leqq h\leqq 1).$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$h\in\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right] \quad (n=1,2,\ldots). \tag{7}$$

В силу леммы 1 (см. также (6) и (7)) имеем:

$$\sup_{\substack{E\subset(-\infty,\infty)\\ |E|=h}} \int\limits_E |f(t)|^p\,dt \leqq \sup_{\substack{E\subset(-\infty,\infty)\\ |E|=\frac{1}{n}}} \int\limits_E |f(t)|^p\,dt \leqq$$

$$\leqq 9\omega_1\left(\frac{1}{n};|f|^p\right) \leqq 18\omega_1\left(\frac{1}{n+1};|f|^p\right) \leqq$$

$$\leqq 18\omega_1(h;|f|^p) \leqq 18p2^{p-1}\|f\|_p^{p-1}\omega_p(h;f),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если существенно неограниченная функция* $f(t)\in L^p(0,1)$ *при некотором* $p\in[1,\infty)$ *и* $c>6$ — *произвольное, но фиксированное число, то найдется построянная* $h_0\equiv h_0(c,f,p)>0$, *для которой*

$$\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\ |E|=h}} \int\limits_E |f(t)|^p\,dt \leqq cp2^{p-1}\|f\|_p^{p-1}\omega_p(h;f) \quad \textit{при всех} \quad h\in[0,h_0]. \tag{8}$$

Доказательство. В силу леммы 3 имеем

$$\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\ |E|=h}} \int\limits_E |f(t)|^p\,dt = \int\limits_0^h F(z;|f|^p)\,dz, \qquad \inf_{\substack{E\subset[0,1]\\ |E|=h}} \int\limits_E |f(t)|^p\,dt = \int\limits_{1-h}^1 F(z;|f|^p)\,dz,$$

где $F(z;|f|^p)$ — невозрастающая на $[0,1]$ равноизмеримая с $|f(t)|^p$ функция.

Так как $f(t)$ существенно неограничена, то отсюда вытекает существование положительной постоянной $h_0 \equiv h_0(c, f, p)$ такой, что справедливо неравенство

$$\int_{1-h}^{1} F(z; |f|^p)\, dz \leqq \left(1-\frac{6}{c}\right) \int_{0}^{h} F(z; |f|^p)\, dz \quad (0 \leqq h \leqq h_0), \tag{9}$$

то есть

$$\frac{6}{c} \sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=h}} \int_E |f(t)|^p\, dt \leqq \sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=h}} \int_E |f(t)|^p\, dt - \inf_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=h}} \int_E |f(t)|^p\, dt \quad (0 \leqq h \leqq h_0). \tag{9'}$$

Пусть число n $(n=1, 2, \ldots)$ выбрано так, что

$$h \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]. \tag{10}$$

Имеем*) (см. (9′), (10) и (6)) при $h \in (0, h_0]$

$$\frac{6}{c} \sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=h}} \int_E |f(t)|^p\, dt \leqq \frac{6}{c} \sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=\frac{1}{n}}} \int_E |f(t)|^p\, dt \leqq$$

$$\leqq \sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=\frac{1}{n}}} \int_E |f(t)|^p\, dt - \inf_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=\frac{1}{n}}} \int_E |f(t)|^p\, dt \leqq 3\omega_1\left(\frac{1}{n}; |f|^p\right) \leqq$$

$$\leqq 6\omega_1\left(\frac{1}{n+1}; |f|^p\right) \leqq 6\omega_1(h; |f|^p) \leqq 6p - 2^{p-1} \|f\|_p^{p-1} \omega_p(h; f),$$

то есть неравенство (8) доказано.

Для случая ограниченных функций справедливо утверждение:

Если измеримая функция f существенно ограничена на отрезке $[0, 1]$ и не эквивалентна постоянной, то

$$\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\|E|=h}} \int_E |f(t)|^p\, dt \leqq c(f, p)\, \omega_p(h, f) \quad \text{при всех} \quad h \in [0, h_0], \tag{8'}$$

где постоянная $C(f, p)$ не зависит от $h \in [0, h_0]$.

Доказательство этого утверждения ведется совершенно также, как доказательство теоремы 2, только в неравенстве (9) постоянную $1-6/C$ следует заменить постоянной $1-\varepsilon(f, p)$, где $\varepsilon(f, p)$ достаточно малое положительное число (неравенство будет оставаться справедливым и для этого случая в силу того, что функция f не эквивалентна постоянной).

*) Здесь мы также пользуемся, данным в работе [4] К. И. Осколкова и С. А. Теляковского, следующим уточнеинем леммы 2: а неравенстве (2) вместо 1/9 можно поставить 1/3.

Значение постоянной $C(f, p)$ в неравенстве (8′) можно конкретизировать. Например, из оценок Ципсера (см. неравенства (2.9) и (3.1) в работе [3]) вытекает:

Если $f(t)$ существенно ограниченая на $[0, 2\pi]$ и не эквивалентная постоянной измеримая функция и $p\in[1, \infty)$—некоторое фиксированное число, то

$$\sup_{\substack{E\subset[0,2\pi]\\ |E|=h}} \int_E |f(t)|^p\,dt \leqq \sup_{t\in[0,2\pi]} \operatorname{vrai} |f(t)|^p \frac{8\pi}{\|f-m(f)\|_p} \omega_p(f, h) \quad (0<h\leqq 1),$$

где

$$m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Из оценок (8) и (8′) непосредственно получаем:

Если функция $f\in L^p(0, 1)$ при некотором $p\in[1, \infty)$ и $f(t)$ не эквивалентна постоянной, то

$$(8'') \qquad \sup_{\substack{E\subset[0,1]\\ |E|=h}} \int_E |f(t)|^p\,dt \leqq c(f, p)\,\omega_p(h; f) \quad \text{при всех} \quad h\in[0, 1],$$

где $C(f, p)$ не зависит от $h\in[0, 1]$.

Замечание 1. Рассматривая линейную на (0, 1) функцию нетрудно убедиться, что неравенство (8″) в смысле порядка неулучшаемо.

Замечание 2. Пусть $\varphi(t)$ неотрицательная, невозрастающая на (0, 1) функция и $\varphi(t)\in L^p(0, 1)$ при некотором $p\in(1, \infty)$. Тогда

$$(11) \qquad \omega_p^p(\delta; \varphi) \leqq \int_0^\delta \varphi^p(t)\,dt \quad \text{при всех} \quad 0\leqq\delta\leqq 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{1-h} [\varphi(t)-\varphi(t+h)]^p\,dt \leqq \int_0^{1-h} \varphi^{p-1}(t)[\varphi(t)-\varphi(t+h)]\,dt \leqq$$

$$\leqq \int_0^{1-h} \varphi^p(t)\,dt - \int_0^{1-h} \varphi^p(t+h)\,dt = \int_0^h \varphi^p(t)\,dt - \int_{1-h}^1 \varphi^p(t)\,dt,$$

откуда и следует справедливость (11).

Отметим, что неравенство (11) неусиляемо. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t\in\left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0, & t\in\left(\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Замечание 3. Справедлива следующая

Теорема 3. *Если функция* $f \in L^p(0, 1)$ *при некотором* $p \in (1, \infty)$, *а* $\varphi(t)$ — *невозрастающая на* $(0, 1)$ *и равноизмеримая с* $|f(t)|$ *функция, то*

$$\omega_p^p(\delta; \varphi) \leqq c_{f,p}\omega_p(\delta; f) \tag{12}$$

при всех $\delta \in [0, 1]$, *где положительная постоянная* $C_{f,p}$ *зависит только от функции* f *и* p.

Доказательство следует из неравенств (8″) и (11) (см. также лемму 3). Любопытно отметить, что неравенство (12) является следствием двух неулучшаемых в смысле порядка неравенств (8″) и (11) (см. замечания 1 и 2).

Вопрос же о неусиляемости самого неравенства (12) связан с вопросом, ранее поставленным одним из авторов (см. [5], стр. 659): верно ли неравенство

$$\omega_p(\delta; f) \geqq c_p\omega_p(\delta; \varphi) \quad (c_p > 0,\ 1 \leqq p < \infty,\ 0 < \delta \leqq \delta_0(f) < 1), \tag{13}$$

где $\varphi(x)$ — функция, невозрастающая и равноизмеримая с неотрицательной функцей $f(t) \in L^p(0, 1)$; если же это неравенство верно, то каково наибольшее значение постоянной c_p?

Более того, неизвестно, будет-ли нижний предел положителен для каждой функции $f \in L^p(0, 1)$

$$\liminf_{\delta \to +0} \frac{\omega_p(\delta; f)}{\omega_p(\delta; \varphi)}.$$

Одним из авторов (см. [5], стр. 652—658) была установлена справедливость неравенства (13) для $p=1$, а К. И. Осколков и С. А. Теляковский (см. [4]) показали, что в оценке

$$\omega_1\left(f; \frac{1}{n}\right) \geqq c\left\{\sup_{\substack{E\subset[0,1]\\ |E|=\frac{1}{n}}} \int_E |f(t)|\,dt - \inf_{\substack{E\subset[0,1]\\ |E|=\frac{1}{n}}} \int_E |f(t)|\,dt\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

постоянная c заключена между 1/3 и 5/7.

Замечание 4. В работе [6] (см. стр. 114) было установлено, что если для достаточно малых δ справедлива оценка

$$\omega_1(\delta; f) \leqq c\delta\log\frac{1}{\delta}, \tag{14}$$

где $c < \dfrac{1}{9}$, то

$$\int_0^1 \exp|f|\,dt < \infty, \tag{15}$$

а при $c=1$ этом вывод уже сделать нельзя.

Здесь же был поставлен вопрос: для каких C, удовлетворяющих условию $1/9 \leqq c < 1$ из (14) следует (15)?

Из результатов К. И. Осколкова и С. А. Теляковского (см. [4]) следует, что из справедливости для функции $f(t)$ неравенства (14) с $c < 1/3$ следует (15).

Для c, удовлетворяющих условиям $1/3 \leqq C < 1$, вопрос остается открытым.

В целом остается открытым вопрос о необходимом и достаточном условии на модуль непрерывности $\omega(\delta)$, чтобы имело место вложение

$$H_p^{\omega(\delta)} \subset e^L \quad (1 \leqq p < \infty)$$

(см. об этом [7], стр. 673).

Замечание 5. Нетрудно убедиться, что неравенства вида (3), (8), (8′) и (8″) не могут дать неулучшаемых предельных теорем вложения при $p > 1$ (например, для случая $H_p^{\omega} \subset L^{\nu}$ с $1 < p < \nu < \infty$ (см. [5] и [6])).

Литература

[1] E. Hille—G. Klein, Riemann's localization theorem for Fourier series, *Duke Math. J.*, **21** (1954), 587—591.

[2] S. Izumi, Some trigonometrical series. XIV, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 324—326.

[3] J. Czipszer, Sur le module de continuité intégrale, *Magyar Tud. Akad. Math. Kutató Int. Közl.*, **6** (1961), 393—398.

[4] К. И. Осколков—С. А. Теляковский, К оценкам П. Л. Ульянова для интегральных модулей непрерывности, *Изв. АН Арм. ССР*, серия математика, VI, № **5** (1971), 406—411.

[5] П. Л. Ульянов, Вложение некоторых классов функций H_p^{ω}, *Изв. АН СССР*, серия матем., **32**, № 3 (1968), 649—686.

[6] П. Л. Ульянов, Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, *Матем. сборник*, **81** (123), № 1 (1970), 104—131.

[7] P. Uljanov, Allgemeine Entwicklungen und gemischte Fragen, *Actes Congrès Intern. Math. Nice*, **2** (1970), 667—678.

(Поступило 11/IV. 1973)